МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ІВАНОВ СЕРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 517.911

АНАЛІЗ ЛОКАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДИНАМІКИ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ НА КОМПАКТНОМУ ГЛАДКОМУ МНОГОВИДІ

01.05.04 — Системний аналіз і теорія оптимальних рішень

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ–2020

На правах рукопису

Робота виконана в Інституті космічних досліджень Національної академії наук України (ІКД НАНУ) та Державного космічного агентства України.

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор,
Яценко Віталій Олексійович,
Інститут космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, завідувач відділу «Дистанційні методи та перспективні прилади»

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор,
Івохін Євген Вікторович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень

доктор фізико-математичних наук, професор,
Макаренко Олександр Сергійович,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», завідувач Науково-дослідного відділу прикладного нелінійного аналізу ІПСА

Захист відбудеться "17" березня 2020 р. о 15:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.002.03 у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35, аудиторія 001.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці імені Г. І. Денисенка Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», за адресою: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37.

Автореферат розісланий "13" лютого 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради
Д 26.002.03 — В. Капустян — В. О. Капустян

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У даний час при дослідженні динамічних явищ і процесів у різних прикладних областях природознавства широко розповсюджено застосування математичних моделей у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь для розв'язання задач автоматичного регулювання, технічної кібернетики, в рамках яких вивчається вільний рух систем при дослідженні перехідних процесів, автоколивальний рух, «хаотична» динаміка тощо.

До класичних задач належить аналіз автономної системи Лоренца, яка знайшла застосування при формалізації процесів конвекції в тороїдальній або замкнутій петлі, обертання водяного колеса, дисипативного гармонійного осцилятора, одномодових лазерів. Інша задача пов'язана з дослідженням автономної системи Ресслера, яка застосовується для опису потоків рідини, різних хімічних реакцій і молекулярних процесів. Відомі задачі, в яких розглядається система Рікітакі, – для опису великих вихорів магнітних полів Землі, та система Гувера – для термостатичної динаміки та ін.

Особливу увагу привертають динамічні автономні системи на компактному гладкому многовиді, необхідність у вивченні яких виникла у механіці та, згодом, при моделюванні та прогнозуванні геомагнітних індексів. Серед найвідоміших прикладів таких систем є маятникова система, фазові криві якої належать деякому компактному гладкому многовиду, диференціальні рівняння на колі, сфері (В.І. Арнольд та ін.), торі (А. Пуанкаре, А. Данжуа) та багато інших. Однією з основних задач аналізу динаміки цих систем є дослідження структурної стійкості (робастності, грубості), а отже і еквівалентності (дифеоморфності, топологічної еквівалентності, орбітальної топологічної еквівалентності).

У 1956 р. В.В. Немицьким вперше була поставлена задача про визначення умов, за яких автономна система топологічно еквівалентна своїй лінійній частині. Д.М. Гробманом та Ф. Гартманом було представлено розв'язок задачі В.В. Немицького та встановлені умови топологічної еквівалентності лінійній частині системи. Однак необхідна і достатня умова локальної дифеоморфності, топологічної та орбітально топологічної еквівалентності динамічних автономних систем потребувала подальших досліджень не тільки на площині, а й у багатовимірному просторі.

Зростання уваги до теми дисертації обумовлене завдяки дослідженням, описаних у працях ряду українських та зарубіжних учених: Личака М.М., Кунцевича В. М., Панкратової Н.Д., Хусаінова Д.Я., Наконечного О. Г., Івохіна Є.В., Яценка В. О., Турбіна А.Ф., Працьовитого М.В., Андронова О.О., Понтрягіна Л.С., Арнольда В.І., Гробмана Д. М., Данилова В.Я., Смейла С., Kaplan J., Yorke J., Farmer J.D., Mori H., Fredericson P., Ott E., Мун Ф., Sano M., Sawada Y., Renyi A., Hartman P., Shaw R., Grassberger P., Procaccia I., Takens F., Janes E., Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A., Eckmann J.-P., Rosenstein M.T., Benettin G. та ін.

Дисертаційна робота присвячена розв'язанню задач знаходження умов локальної (в околі точки положення рівноваги) дифеоморфності автономних систем на компактному гладкому многовиді, виведенню функції динаміки норм дотичних векторів автономних систем, які задовольняють умовам Гробмана-Гартмана, а також дослідженню умов рівності розмірності Каплана-Йоркі для автономних динамічних систем, отриманню динамічних характеристик векторного поля та аналізу і математичному обґрунтуванню методу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом однієї змінної автономної системи. Важливість та значущість представлених задач визначає актуальність теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами та темами. Дисертація виконувалась у відділі «Дистанційних методів і перспективних приладів» Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України у межах пріоритетного напряму розвитку науки і техніки «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави», а також:

– за європейським проектом PROGRESS «Prediction of Geospace Radiation Environment and Solar wind parameters» у рамках програми HORIZON – 2020, GA#637302;

– за темою, яку було затверджено Президією НАН України «Розробити моделі фізико-хімічних та гідродинамічних процесів у космічному просторі та методи оброблення супутникових даних», номер Держреєстрації 0113U003019;

– для Українського центру космічної погоди.

Мета та завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є дослідження локальних властивостей динаміки нелінійних автономних систем на компактному гладкому многовиді.

Досягнення поставленої мети зумовило необхідність розв'язання таких *задач*:

- доведення тверджень щодо екстремальності ентропії нормованого вектора норм дотичних векторів для автономної системи та отримання екстремального функціоналу;

- визначення умов локальної топологічної та орбітально топологічної еквівалентності (дифеоморфності) автономних систем та співвідношень щодо розмірності Каплана-Йоркі;

- математичне обґрунтування методу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом однієї змінної автономної динамічної системи та обчислення їх за часовими рядами геомагнітних індексів.

Об'єкт дослідження – процеси, які описуються нелінійними автономними динамічними системами на компактному гладкому многовиді.

Предмет дослідження – локальні властивості динаміки нелінійних автономних систем на компактному гладкому многовиді.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі застосовуються методи: математичного та функціонального аналізу, теорії звичайних диференціальних рівнянь, матричної алгебри, теорії стійкості Ляпунова (перший і другий метод), методи структурної стійкості (грубості, робастності), теорія прийняття рішень в умовах невизначеності, чисельні методи оптимізації.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що у дисертаційній роботі *вперше:*

- отримано твердження щодо екстремальності ентропії нормованого вектора норм дотичних векторів для автономних систем, для яких виконуються умови Гробмана-Гартмана, та отримано екстремальний функціонал у вигляді лагранжіана;

- сформульовано умови локальної топологічної еквівалентності автономних систем на компактному гладкому многовиді та обґрунтовано рівність розмірності Каплана-Йоркі;

- запропоновано декомпозицію експонент Ляпунова для дослідження структури векторного поля нелінійних автономних систем;

удосконалено:

- метод оцінювання локальних експонент Ляпунова за часовими рядами.

набули подальшого розвитку:

- дослідження локальних характеристик автономних систем на основі екстремального функціоналу;
- знаходження умов локальної структурної стійкості негіперболічних автономних систем.

Практичне значення одержаних результатів полягає у математичному обґрунтуванні методу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом та способу отримання умов локальної дифеоморфності для нелінійних динамічних автономних систем на компактному гладкому многовиді.

Отримані в роботі результати можуть бути застосовані до широкого класу задач у різних прикладних галузях.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи, що виносяться до захисту, отримані автором самостійно. У публікаціях [1,3,4,12,18], виконаних у співавторстві з науковим керівником В.О. Яценко, особистий внесок здобувача полягав у виконанні всіх основних доведень, розрахунків та формулюванні висновків, а наукового керівника – у постановці задач, рекомендацій щодо вибору методів дослідження та проведення аналізу, вибору наукової літератури. Зокрема, у статті [5] здобувачу належить частина 3 – чисельні результати та висновки, де проведено порівняння нейромережі Елмана з NARMAX моделлю гарантованого прогнозування Dst індексу, а також виконано аналіз динамічних властивостей: розрахунок старшого показника Ляпунова для Dst індексу, наведені розрахунки горизонту прогнозу, обґрунтовано зсув за фазою модельних значень з реальними даними через «хаотичну» динаміку цього індексу, сформульовано висновки. У статтях, опублікованих з іншими співавторами, здобувачу належить: в [8] – з метою підвищення точності вимірювань супутникового гравіметра, обґрунтовано керування магнітного підвісу, динаміка якого описується білінійною системою, через керування показниками Ляпунова; у [9] – керування показниками Ляпунова у ґратці зв’язаних осциляторів; в [6], [10] – обговорення результатів, в [11] – обговорення результатів та формулювання висновків.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень були представлені в Інституті космічних досліджень НАНУ-ДКАУ у відділі дистанційних методів та перспективних приладів на семінарі «Декомпозиція експонент Ляпунова і прогнозування космічної погоди» (голова семінару – Яценко В.О.), в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка на факультеті комп’ютерних наук та кібернетики на науковому міжкафедральному семінарі кафедри моделювання складних систем і кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень «Моделювання та оптимізація систем з неповними даними» (керівники: Гаращенко Ф.Г., Наконечний О.Г.), в Інституті математики НАН України, а також на українських та міжнародних конференціях:

– «GEO-UA» (Kyiv, 2014 р.);
– «14-та конференція з космічних досліджень» (Ужгород, 2014 р.);
– «четверта Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики» (Київ, 2015);
– «15-та українська конференція з космічних досліджень» (Одеса, 2015 р.);
– «Теорія прийняття рішень» (Ужгород, 2016 р.);
– «Інформаційні технології та взаємодії» (Київ, 2016);
– "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (DSMSI-2017) (Київ, 2017 р.);
– «17 Ukrainian conference on space research» (Odesa, 2017);
– «IV UK-Ukraine-Spaine Meeting on Solar Physics and Space Science» (Kyiv, 2017);
– «Automation-2017» (Kyiv, 2017 р.);
– «Modern computer science» (Київ, 2017);
– "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (DSMSI-2019) (Київ, 2019 р.)

Публікації. Основні результати роботи надруковано у 18 публікаціях загальним обсягом 3 д.а. (з яких 2,8 належать особисто автору), з яких 5 статей – у фахових наукових журналах, рекомендованих МОН України, 1 з яких входить до наукометричної бази SCOPUS, 1 стаття – в інших наукових виданнях та 12 у збірниках тез та праць конференцій.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел у кількості 101 найменування, містить 17 рисунків та 2 таблиці. Повний обсяг дисертації складає 140 сторінок, основна частина викладена на 109 стор.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику Яценку Віталію Олексійовичу за постановку розглянутих в дисертаційній роботі задач та особливу увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дана загальна характеристика роботи, висвітлено стан наукової проблеми, обґрунтована актуальність теми, сформульовані мета і задачі дослідження. Показано зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, відображено наукову новизну, практичне значення роботи й отриманих результатів, визначено особистий внесок здобувача, наведені дані про структуру дисертації, апробацію її результатів і публікації.

У першому розділі *«Огляд літератури та основних результатів»* наводиться огляд літератури та аналіз сучасних досліджень структурної стійкості, а також локальної дифеоморфності для автономних систем, які описуються звичайними диференціальними рівняннями на компактному гладкому многовиді, дослідження дивних атракторів, вкладення, фрактальні розмірності та їх застосування.

Наведено основні означення структурної стійкості динамічних систем на компактному гладкому многовиді. Детально описано сутність та приведено умови грубої або структурно стійкої маятникової системи.

Під многовидом розуміється такий топологічний простір M, якщо виконуються умови:

- M є хаусдорфовим простором, тобто є околи без перетинання при будь-яких двох точках;
- M задовольняє другій аксіомі зліченості, тобто передбачається наявна злічена база;
- M локально є гомеоморфний деякій області евклідового простору $\Re^d$.

Під автономними системами на компактному гладкому многовиді M будемо розуміти системи вигляду

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_d),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i = \overline{1, d},$$

$$t \geq t_0,\ x \in M,$$

де при відомих початкових умов x_i^0, $i = \overline{1, d}$, процес за цим диференціальним рівнянням вважається повністю визначеним, f є вектор-функція принаймні класу гладкості C^2, $\dim(M) \geq 2$.

Многовид M локально є гомеоморфним деякій області евклідового простору $\Re^d$, на основі означення метричного простору. Тому, локально, така система на многовиді M не відрізняється від такої ж системи на $\Re^d$.

Якщо система має нульовий розв’язок $x(t) \equiv 0$, тоді гарантується існування і єдиність розв'язку $x(t)$ задачі Коші при будь-яких початкових умовах.

Для виявлення наявних властивостей динаміки досліджуваних процесів будемо застосовувати виявлення цих властивостей при дослідженні формалізованої математичної моделі.

Зазвичай, у теорії структурної стійкості розглядаються системи диференціальних рівнянь на многовидах. Якщо многовид є компактним, то розв’язки системи продовжуються необмежено.

Множина векторів, які є дотичними до многовиду M у точці x, мають структуру лінійного простору, який називається дотичним простором $T_x M$ (до многовиду M у точці x), причому його розмірність приймається рівною розмірності многовиду M.

Нехай об’єднання дотичних просторів до M в усіх його точках представляється формулою $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$. Тоді множина TM є гладким многовидом M, а TM є дотичним розшаруванням многовиду M.

Система (M, f) називається орбітально топологічно еквівалентною системі (M_a, f_a), якщо існує гомеоморфізм (дифеоморфізм) фазового простору першої системи на фазовий простір другої, який переводить орієнтовані фазові криві першої в орієнтовані фазові криві другої системи.

Автономна динамічна система $\dot{x} = f(x)$, $x \in M$, де f - вектор-функція класу гладкості C^σ, $\sigma \geq 2$, M - компактний гладкий многовид ($f : M \to TM$, де TM - дотичне розшарування) буде грубою, або структурно стійкою, якщо знайдеться такий окіл Ω_f точки векторного поля f у просторі $C^\sigma(M, TM)$, що при кожній $f_a \in \Omega_f$ система $\dot{x} = f_a(x)$ буде орбітально топологічно еквівалентна системі $\dot{x} = f(x)$, а гомеоморфізм (або дифеоморфізм), який виконує цю еквівалентність близький до тотожного в топології простору $C^0(M, M)$.

Автономні динамічні системи на компактному гладкому многовиді дуже поширені у різних прикладних областях, наприклад, при дослідженні властивостей динаміки магнітосфери Землі (довільна локальна область U відмічена на многовиді M) (рис.1).

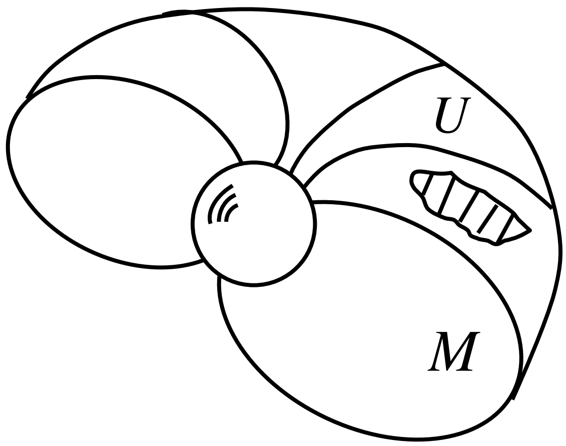

Рис. 1. Приклад многовиду M з локальною областю U

Основні результати автора викладено в другому, третьому та четвертому розділах дисертації.

У другому розділі *«Локальна структурна стійкість гіперболічних динамічних систем»* встановлено умови локальної дифеоморфності автономних систем на компактному гладкому многовиді заданої розмірності при наявному певному дифеоморфізмі. Визначено нормований вектор норм дотичних векторів, досліджено вироджені точки положення рівноваги на площині та у багатовимірному просторі за умов виконання умов Гробмана-Гартмана.

У підрозділі 2.1 представлено ентропію нормованого вектора норм дотичних векторів для автономних систем, виведено та обґрунтовано функціонал, який отримано на основі застосування принципу максимуму.

Розглянемо автономну динамічну систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

де $x \in M$, f - вектор-функція класу гладкості C^{σ}, $\sigma \geq 2$, M - компактний гладкий многовид, σ - натуральне число.

Система (1) називається гіперболічною, якщо її матриця Якобі $J = \partial f(x)/\partial x|_{x=x_0}$ в околі нуля не має власних значень на уявній вісі.

Розглянемо дві довільні траєкторії в d - вимірному фазовому просторі, що починаються з двох сусідніх початкових станів x_0 та $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, які еволюціонують у часі за траєкторіями, що визначаються векторами $x(t)$ та $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ з евклідовою нормою.

Функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Маклорена в деякому околі початку координат та записати (1) у вигляді

$$\dot{x} = Jx + \sum_{\varsigma=2}^{\infty} \frac{1}{\varsigma!} V_{\varsigma}(x), \tag{2}$$

де складові $V_{\varsigma}(x)$ - описують члени від другого і більш високого порядку малості, $\varsigma \geq 2$. Динаміка векторної функції $r(x_0, t)$ задається рівнянням першого наближення

$$\dot{r}(x_0, t) = Jr(x_0, t).$$

У просторі $\Re^d$ існує d ортонормованих векторів e_i, $i = \overline{1,d}$. Позначивши норми векторів $\|r(e_i, t)\|$, $i = \overline{1,d}$ як $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1,d}$, отримуємо функцію $p_i^t(\|r_i^t\|) = \|r_i^t\| \Big/ \sum_{j=1}^{d} \|r_j^t\|$ норми вектора $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1,d}$ для кожного моменту часу t, що також скорочено позначимо як p_i^t, $i = \overline{1,d}$.

Означення 2.1. Ентропією називається величина $E(p^t) = -\sum_{i=1}^{d} p_i^t \ln p_i^t$, $i = \overline{1,d}$.

Означення 2.2. Величина $\overline{E(p)} = -\sum_{i=1}^{d} \overline{p_i} \ln \overline{p_i}$, де $\overline{p_i} = \dfrac{\|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^{d} \|r_j^0\| \exp(\lambda_j)}$, $i = \overline{1,d}$, називається середньою ентропією, де λ_i - експоненти Ляпунова, $i = \overline{1,d}$.

Нехай система (1)-(2) є гіперболічною, серед власних значень матриці Якобі, обчисленої в околі положення рівноваги не має нулів (умови Гробмана-Гартмана).

Розв'язано задачу отримання екстремального функціонала для виведення функції p_i^t, $i = \overline{1,d}$ у загальному вигляді для системи (1). Обґрунтовано вибір вигляду екстремального функціоналу на основі застосування принципу максимуму та доведено екстремальність ентропії вектора p_i^t, $i = \overline{1,d}$ для кожного моменту часу t.

Теорема 2.1. Якщо система (1) з матрицею Якобі J є гіперболічною, J не має нульових власних значень, то $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1,d}$ має розподіл p_i^t, $i = \overline{1,d}$, який максимізує функціонал $\Phi(p) = E(p) + \beta \mathrm{Z}(p) + \mu \Im(p) + \gamma \mathrm{N}(p)$ вигляду

$$\Phi(p) = -\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right)\ln p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right) + \beta\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right)\tilde{l}_i^{\,t} +$$

$$+\mu\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^0\right\|\right)\ln\left\|r_i^0\right\| + \gamma\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right),$$

де β,μ,γ - множники Ейлера - Лагранжа, ентропія $E(p^t) = -\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right)\ln p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right)$, експоненціальна дивергенція (конвергенція) $\mathrm{Z}(p^t) = \beta\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right)\tilde{l}_i^{\,t}$, початкові умови $\Im(p^t) = \mu\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^0\right\|\right)\ln\left\|r_i^0\right\|$, умова нормування $\mathrm{N}(p^t) = \gamma\sum_{i=1}^{d} p_i^t\left(\left\|r_i^t\right\|\right)$, $\tilde{l}_i^{\,t}$, $i=\overline{1,d}$, визначають з умови експоненціального темпу дивергенції (конвергенції) $\lambda_i t = \beta\tilde{l}_i^{\,t}$ у момент часу t, причому середній експоненціальний темп дивергенції або конвергенції $\beta\tilde{l}_i = \lambda_i$.

Умовою нормування встановлюється $\sum_{i=1}^{d} p_i^t = 1$, $p_i^t \ge 0$, $i=\overline{1,d}$.

Теорема 2.2. Якщо експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) дорівнює $\mathrm{Z}(p^t) = \beta\tilde{l}_i^{\,t}t$ і спектр експонент Ляпунова впорядковується за зменшенням $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_d$, то $\beta\tilde{l}_i^{\,t} = \lambda_i$, а $\overline{E(p)} = -\sum_{i=1}^{d}\overline{p_i}\ln\overline{p_i} = 0$, $p_1 = 1$, $p_i = 0$, $i=\overline{2,d}$, $d \ge 2$.

У підрозділі 2.2 розглянуто автономну систему (1) на компактному $C^{\sigma+1}$ - гладкому многовиді M, де σ - натуральне число.

У пункті 2.2.1 розв'язано задачу виявлення умов локальної дифеоморфності, локальної топологічної та орбітально топологічної еквівалентності автономних систем на компактному гладкому многовиді M.

Відображення $f:\mathrm{TM}\to\mathrm{M}$, яке є C^{σ} - гладким, називається векторним полем на многовиді M, якщо $f(x)\in T_xM$ або $\eta(f(x)) = x, \forall x\in M$.

Розв'язком системи (1) на інтервалі $\Omega\subseteq\Re$ називається таке $C^{\sigma+1}$ - гладке відображення $\varphi:\Omega\to M$, яке перетворює систему (1) на тотожність на $\Omega: \dot{\varphi}(t)\equiv f(\varphi(t)), \forall t\in\Omega$, де $\dot{\varphi}(t), \forall t\in\Omega$ є вектором з $T_{\varphi(t)}M$.

Виходячи з того, що многовид M локально є гомеоморфним деякій області евклідового простору $\Re^d$, поведінка системи (1) на многовиді M локально не відрізняється від поведінки аналогічної системи (1) на $\Re^d$.

За теоремою Гробмана-Гартмана динамічна система (1) топологічно еквівалентна своїй лінійній частині з урахуванням обмежень: а) система (1) є гіперболічною; б) серед власних значень матриці Якобі, обчисленої в околі точки положення рівноваги, не має нулів.

Нехай є дві динамічні системи $\dot{x} = f_1(x)$, $x\in M_1$ та $\dot{y} = f_2(y)$, $y\in M_2$ або (M_1, f_1) і (M_2, f_2), де M_1, M_2 – компактні гладкі многовиди класу принаймні C^2

(якщо M має край, то нехай f не дотикається краю), f_1, f_2 - векторні поля. Як було сказано вище, поведінку цих d - вимірних динамічних систем локально можна розглядати на $\Re^d$.

У пункті 2.2.2 визначено умови локальної дифеоморфності таких систем.

Дві системи (M_1, f_1) і (M_2, f_2) називаються локально дифеоморфними в околі точки положення рівноваги, якщо існує такий дифеоморфізм, який переводить векторне поле f_1 в околі точки положення рівноваги однієї системи у векторне поле f_2 в околі точки положення рівноваги другої системи.

Наслідок 2.1. Якщо виконуються умови а) і б), то при локальній (в околі точки положення рівноваги) топологічній еквівалентності лінійних частин двох систем топологічно еквівалентні й системи $\dot{x} = Ax + f_1^*(x)$, $\dot{y} = By + f_2^*(y)$.

Теорема 2.3 При виконанні умов а) і б) рівність матриць Якобі для обох систем, обчислених в околі точок положення рівноваги, є необхідною та достатньою умовою локальної дифеоморфності систем з однаковою розмірністю. Характерною особливістю такого дифеоморфізму h є властивість $J_h(m_1) = kI$, де $J_h(m_1)$ - матриця Якобі функції $h(m_1)$, обчислена в точці m_1, I - одинична матриця, k - деяке дійсне число $k \neq 0$.

У пункті 2.2.3 доведено наслідок теореми 2.3 наступного змісту.

Наслідок 2.2. Рівність власних значень матриць Якобі, обчислених в околі точок положення рівноваги, є необхідною умовою локальної топологічної еквівалентності систем.

У підрозділі 2.3 розглянуто умови локальної орбітальної топологічної еквівалентності.

Системи називаються орбітально топологічно еквівалентними в околі точок положення рівноваги, якщо існує гомеоморфізм (дифеоморфізм) деякого околу точки положення рівноваги векторного поля однієї системи в окіл точки положення рівноваги другого векторного поля, який відображує локальні фазові криві одного поля в друге зі збереженням напрямку руху.

Теорема 2.4 При виконанні умов а) і б) рівність матриць Якобі для обох систем, обчислених в околі точок положення рівноваги, є необхідною та достатньою умовою локальної орбітально топологічної еквівалентності систем з однаковою розмірністю. Характерною особливістю такого дифеоморфізму h є властивість $J_h(m_1) = kI$, де $J_h(m_1)$ - матриця Якобі функції $h(m_1)$, обчислена в точці m_1, I - одинична матриця, k - деяке дійсне число $k \neq 0$.

У підрозділах 2.4 - 2.5 розглянуто граничні за ентропією типи точок положення рівноваги (особливі точки) на площині та у багатовимірному просторі з урахуванням обмежень Гробмана-Гартмана.

Означення 2.3. За умови $E(p^t) = E^{\max}(p^t)$, де $E^{\max}(p^t)$ - максимальна ентропія для деякої динамічної системи (1), точки положення рівноваги називаються граничними за ентропією.

Відповідно до властивостей ентропії розглядаються такі випадки:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_d = \lambda < 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги асимптотично стійка за Ляпуновим. Тип цієї точки – d - вимірний стійкий вузол.

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_d = \lambda > 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги нестійка за Ляпуновим. Тип цієї точки – d - вимірний нестійкий вузол.

У пунктах 2.4.1 та 2.4.2 представлені фазові портрети таких систем в околі точки положення рівноваги.

У пунктах 2.5.1 та 2.5.2 проаналізовано різні типи точок положення рівноваги на площині: центр, вузол, фокус і сідло. Якщо фазовий простір d більшої розмірності ($d > 2$), число типів таких точок більше і вони мають поєднувати в собі властивості наведених вище типів. Тому, при більших розмірностях не вводяться нові назви точок положення рівноваги, а виділяються підпростори, наприклад, P^{S_1}, P^{S_2}, …, P^{S_n}, у повному просторі P, $\dim P = \dim P^{S_1} + ... + \dim P^{S_n}$, де $S_1, ..., S_n$ - номери підпросторів, а dim - розмірність простору. Відмічається, що простір доцільніше розбивати на підпростори зі стійкими точками або нестійкими певного типу.

Поєднання властивостей двовимірної динамічної системи представлено на загальному прикладі тривимірної системи.

У підрозділі 2.6 отримано твердження для випадків існування нуля серед власних значень.

Твердження 2.1. Нехай хоча б одне власне значення матриці Якобі в околі точки положення рівноваги, дійсна частина якого дорівнює нулю, а всі інші власні значення менше нуля. Якщо відповідна дійсна частина власного значення матриць у членах ряду другого або більш високого порядків малості (якщо попередні теж нульові) від’ємна, то незбурений рух стійкий за Ляпуновим.

У третьому розділі *«Розмірність Каплана-Йоркі та локальна топологічна еквівалентність»* отримано умови рівності розмірності Каплана-Йоркі для автономних динамічних систем та досліджено цю розмірність для граничних за ентропією типів точок положення рівноваги.

У підрозділі 3.1 розглядається розмірність Каплана-Йоркі та її зв’язок з іншими розмірностями: ємністю, інформаційною розмірністю, узагальненою розмірністю та розмірністю Грасбергера-Прокаччі.

У підрозділі 3.2 розглядається задача рівності розмірності Каплана-Йоркі для дифеоморфних автономних систем.

У пунктах 3.2.1 та 3.2.2 розв’язано задачу про встановлення умов рівності розмірності Каплана-Йоркі для автономних систем.

Наслідок 3.1. Якщо рівні аналітичні вирази матриць Якобі динамічних систем вигляду (1), то розмірність Каплана-Йоркі для цих систем співпадає.

Наслідок 3.2. Нехай на достатньо малому проміжку часу з однаковим інтервалом Δt обчислюються локальні матриці Якобі двох систем вигляду (1). Якщо локальні матриці Якобі автономних динамічних систем рівні між собою, то розмірність Каплана-Йоркі для цих систем співпадає.

У підрозділі 3.3 показано, що розмірність Каплана-Йоркі для граничних за ентропією точок положення рівноваги на площині (при стійкому вузлі – дикритичному вузлі) дорівнює нулю.

Твердження 3.1. Для динамічних систем (1), у яких точка положення рівноваги – багатовимірний вузол (дикритичний вузол) є стійким за Ляпуновим, розмірність Каплана-Йоркі співпадає з топологічною розмірністю і дорівнює нулю.

У підрозділі 3.4 розглядається розмірність Каплана-Йоркі для граничних за ентропією типів точок положення рівноваги у тривимірному просторі

$$а)\ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0;\ б)\ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3;$$
$$в)\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Розмірність Каплана-Йоркі для випадку *а* - дорівнює нулю. Для випадку *б* - розмірність Каплана-Йоркі $D_{KY} > 1$, а для *в* - $D_{KY} > 2$.

У четвертому розділі «*Чисельний аналіз динамічних систем за часовими рядами*» запропоновано метод обчислення експонент Ляпунова та його складові елементи, а також виявлення змінювання векторного поля за часовим рядом за допомогою декомпозиції експонент Ляпунова. Проведено аналіз властивостей динаміки геомагнітних індексів Dst, Kp, AE.

У підрозділі 4.1 математично обґрунтовано спосіб оцінювання матриці Якобі для довільного моменту часу та метод обчислення експонент Ляпунова.

Нехай $\{y_j\},\ j = \overline{1,N}$ заданий дискретний часовий ряд, кожен елемент якого формулюється $y_j = y(t_0 + (j-1)\Delta t)$, $j = \overline{1,N}$. Нехай задано деяку нелінійну динамічну систему $\dot{y} = F(y)$, права частина якої представляє собою нелінійні вектор-функції, принаймні C^1 класу гладкості, $y \in \Re^d$ (також можна вважати динамічну систему на компактному гладкому многовиді M, тобто $y \in M$, оскільки локально динамічна система при $y \in \Re^d$ гомеоморфна такій же динамічній системі на компактному гладкому многовиді, тобто при $y \in M$). Передбачається, що векторне поле F не змінює своєї структури, а також кардинальне число вектора $Card(y)$ постійне (кількість змінних постійна).

Розглянемо кулю з радіусом ξ, центровану від орбітальної точки y_j, таким чином, щоб до кулі потрапила найбільша кількість точок, а також знайдемо цю множину точок $\{y_k\}, k = \overline{1,n}$, $n < N$, розміщених у кулі, тобто

$$\{v_y\} = \{y_k - y_j \mid \quad \|y_k - y_j\| \le \xi\}, \tag{3}$$

де $\|y_k - y_j\|$- евклідова норма різниці, $k = \overline{1,n}$. Оскільки орбітальна точка y_j центрована, то це забезпечить найбільшу кількість сусідніх точок, які задовольняють умові (3). У процесі еволюції станів системи $\tau = m\Delta t$ орбітальна точка y_j прямує до y_{j+m}, а вектор різниці v_y відображується до моменту часу вигляду

$$\{v_z\} = \{y_{k+m} - y_{j+m} \mid \quad \|y_{k+m} - y_{j+m}\| \le \xi\}.$$

Для достатньо малого радіусу ξ множини $\{v_y\}$ та $\{v_z\}$ надають можливість апроксимувати вектори дотичних у просторі дотичних, а еволюція $\{v_y\}$ до $\{v_z\}$ може бути представлена матрицею J_j - матриця Якобі, за Екманом-Руелем, відношення радіусу кулі ξ до діаметра реконструйованого атрактора D_α задається виразом $\dfrac{\xi}{D_\alpha} = \rho << 1$.

За алгоритмом найменшої квадратичної похибки, отримуємо

$$\min_{J_j} S = \min_{J_j} \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\left\| v_z^s - J_j v_y^s \right\|^2 \quad (4)$$

Позначимо елементи матриці J_j через $a_{kl}(j)$. Застосувавши умову екстремуму для (4):

$$\frac{\partial S}{\partial a_{kl}(j)} = 0,$$

знайдемо наступні вирази для J_j:

$$J_j V = C,\ V_{kl} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} v_y^k v_y^l,\ C_{kl} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} v_z^k v_y^l, \quad (5)$$

де V, C є $d \times d$ коваріаційними матрицями, v_y^k та v_z^k є k-компонентами векторів v_y^s та v_z^s, відповідно. Якщо $n \ge d$ і відсутня виродженість, то рівняння (5) мають розв'язок.

Оцінивши матрицю Якобі, побудованої в околі орбітальної точки, можна обчислити експоненти Ляпунова

$$\lambda_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\tau}\sum_{j=1}^{n} \ln\left\| J_j e_i^j \right\|,\ i = \overline{1,d},$$

де e_i^j - j - тий елемент ортонормованого вектора e_i, $i = \overline{1,d}$.

У підрозділі 4.2 обґрунтовано застосування чисельного диференціювання за часовим рядом за допомогою полінома Тейлора і Лагранжа для систем вигляду (1).

В околі точки $x(t_0)$ величину $x(t)$ розкладемо у ряд Тейлора

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(x - x(t_0)) + \frac{x''(t_0)}{2!}(x - x(t_0))^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(x - x(t_0))^k. \quad (6)$$

Позначимо $\dfrac{x^{(k)}(t_0)}{k!} = C_k$, $k = \overline{0,n}$. Тоді отримуємо

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k (x - x(t_0))^k.$$

За допомогою методу найменших квадратів оцінюємо невідомі параметри C_k, $k = \overline{0,n}$. Похідна такого полінома за часом представляється формулою

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{n} kC_k (x - x(t_0))^{k-1}.$$

Для чисельного диференціювання з застосуванням інтерполяційних формул використаємо інтерполяційний многочлен Лагранжа. Отримуємо

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_n t^n.$$

За допомогою методу найменших квадратів (або за способом Лагранжа) оцінюємо невідомі параметри C_k, $k = \overline{0,n}$. Похідна такого полінома за часом подається формулою

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{n}kC_k t^{k-1}.$$

Використаємо такий підхід для знаходження похідної за часовим рядом. Застосуємо многочлен Лагранжа. Позначимо систему

$$\begin{cases} x_1'(t)=\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2,...,x_d),\\ x_2'(t)=\dfrac{dx_2}{dt}=f_1(x_1,x_2,...,x_d),\\ \dots\\ x_d'(t)=\dfrac{dx_d}{dt}=f_1(x_1,x_2,...,x_d)\end{cases}$$

Нехай $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, …, $x_d=x_d(t)$. Розглянемо систему складених функцій

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(t)=f_1[x_1(t),x_2(t),...,x_d(t)],\\ \tilde{f}_2(t)=f_2[x_1(t),x_2(t),...,x_d(t)],\\ \dots\\ \tilde{f}_d(t)=f_d[x_1(t),x_2(t),...,x_d(t)].\end{cases}$$

Похідна кожної із складених функції за часом t системи дорівнює

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{f}_1}{dt}=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}+...+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_d}\dfrac{dx_d}{dt},\\ \dfrac{d\tilde{f}_2}{dt}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}+...+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_d}\dfrac{dx_d}{dt},\\ \dots\\ \dfrac{d\tilde{f}_d}{dt}=\dfrac{\partial f_d}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial f_d}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}+...+\dfrac{\partial f_d}{\partial x_d}\dfrac{dx_d}{dt}.\end{cases}$$

З цього рівняння видно, що шукані елементи матриці Якобі довільного рядка $i=\overline{1,d}$ мають вигляд $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}$,…, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_d}$, а обчислені чисельно за допомогою многочлена Лагранжа: $\dfrac{d\tilde{f}_i}{dt}$, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$,…, $\dfrac{dx_d}{dt}$, $i=\overline{1,d}$. Оскільки останні значення є наближеними до точних значень, то запишемо співвідношення

$$\frac{d\tilde{f}_i}{dt}=C_1^i\frac{dx_1}{dt}+C_2^i\frac{dx_2}{dt}+...+C_d^i\frac{dx_d}{dt}+o(t),\ i=\overline{1,d},$$

де $o(t)$ - похибка, $C_j^i=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,d}$.

За допомогою методу найменших квадратів оцінюємо невідомі $C_1^i,C_2^i,...,C_d^i$,

$i=\overline{1,d}$

$$\min_{C_1^i,C_2^i,\dots,C_d^i} S=\min_{C_1^i,C_2^i,\dots,C_d^i}\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\left\|\frac{d\tilde{f}_i^s}{dt}-C_1^i\frac{dx_1^s}{dt}+C_2^i\frac{dx_2^s}{dt}+\dots+C_d^i\frac{dx_d^s}{dt}\right\|^2 .$$

Якщо точки розташовані у кулі з досить малим радіусом ξ (за Екманом-Руелем) і відсутніми виродженими випадками, то єдиний розв'язок для невідомих $C_1^i,C_2^i,\dots,C_d^i$, $i=\overline{1,d}$ можна знайти за допомогою розв'язку наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{F}_k=C^I\tilde{X}_k,\ k=\overline{1,d},$$

де $\tilde{F}_k$ - вектор-стовпець з d елементів $\frac{d\tilde{f}_i}{dt}$, $i=\overline{1,d}$, C^I - вектор-строка $\left[C_1^i,C_2^i,\dots,C_d^i\right]$, $\tilde{X}_k$ - $d\times d$ матриця, складена з векторів $\frac{dx_i}{dt}$, $i=\overline{1,d}$, з d елементів кожний. При покращенні наближення для похідних $\frac{d\tilde{f}_i}{dt}$ і $\frac{dx_i}{dt}$, $i=\overline{1,d}$, можна отримати достатньо точні значення елементів матриці Якобі.

У роботі наведено результати розрахунків експонент Ляпунова, декомпозиційних границь, ляпуновської розмірності та розмірності Грасбергера-Прокаччі, ентропії Колмогорова, горизонту прогнозу для геомагнітних індексів D_{st}, Kp, AE.

Отриману методику запропоновано для розв'язування задачі обчислення експонент Ляпунова за часовими рядами автономної динамічної системи.

У підрозділі 4.3 отримано умову виявлення зміни у векторному полі динамічної автономної системи за часовим рядом.

У пунктах 4.3.1 та 4.3.2 розглянуто декомпозицію експонент Ляпунова.

Лема 4.1. Величина $\lambda_i=l_D+l_i$, $i=\overline{1,d}$, де $l_D=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\sum_{j=1}^{d}r_j(t)}{\sum_{j=1}^{d}r_j(0)}$ і $l_i=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{p_i^t}{p_i^0}$, $i=\overline{1,d}$ визначають спектр експонент Ляпунова λ_i, $i=\overline{1,d}$.

Величина l_D є найбільшою серед декомпозиційних границь й існує наступне впорядкування: $l_D\ge l_1\ge l_2\ge\dots\ge l_d$.

Лема 4.2. Якщо $l_D=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\sum_{i=1}^{d}r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d}r_i(0)}=\ln\frac{\sum_{i=1}^{d}r_i(t)}{\sum_{i=1}^{d}r_i(0)}$, $\forall t>N_1$, то система (1) є лінійною з постійними параметрами.

У пункті 4.3.3 наводиться алгоритм обчислення декомпозиційних границь за часовим рядом. Нехай $J_j=Q_jR_j$, де Q_j - ортогональна, R_j - верхньо-трикутна матриця, $j=\overline{1,N}$. Тоді найбільша декомпозиційна границя може бути обчислена за наступною формулою

$$l_D = \frac{1}{N\tau}\sum_{j=1}^{N}\ln\sum_{i=1}^{d}R_j(i,i),$$

де τ - кількість точок, обраних для оцінювання матриці Якобі за 1 ітерацію, а N - відповідно кількість цих ітерацій, $R_j(i,i)$ - елементи головної діагоналі.

При дослідженні часового ряду невідомою є розмірність фазового простору досліджуваної системи d. За допомогою алгоритму Грасбергера-Прокаччі отримаємо оцінку розмірності d, попередньо визначивши часову затримку t_d (наприклад, використавши автокореляційну функцію). Тоді, відповідно до теореми Такенса, можна реконструювати за часовим рядом однієї змінної деякої системи $y_i = [x(i\tau),...,x(i\tau+(d-1)t_d)]$ і обчислити показник l_D, попередньо обчисливши матриці Якобі за методом, представленим у підрозділі 4.2.

Для визначення часу зміни структури системи пропонується застосувати показник l_D. В якості прикладу у системі Лоренца за припущенням зміни одного з параметрів $\beta = 4$ при $t \le 1000$, $\beta = 8$, при $t > 1000$ секунд, отримано чисельні розрахунки показника l_D, за яким можна знаходити наближений час зміни структури.

У підрозділі 4.4 продемонстровано обчислення розмірності Каплана-Йоркі, середньої ентропії та ентропії Колмогорова.

Для даних часових рядів, що характеризують геомагнітні індекси Kp, D_{st} та AE кореляційна розмірність індексів оцінена в 6.01, 4.08 та 6.39, відповідно, а розмірність фазового простору дорівнює 8, 6 і 10, відповідно. Підтверджується нерівність $D_{GP} < D_L$, де D_{GP} - кореляційна розмірність Грасбергера-Прокаччі.

У роботі ентропію Колмогорова (K) для геомагнітних індексів оцінено як суму невід'ємних експонент Ляпунова, оцінених за методом, наведеним вище.

Отримана величина ентропії $\overline{E(p)}$ близька до максимального значення для всіх розглянутих індексів за період з липня 2008 до травня 2016 р., тобто для Kp індексу: $\overline{E^{\max}(p)} = \ln(8) \approx 2.079$, Dst індексу: $\overline{E^{\max}(p)} = \ln(6) \approx 1.792$, AE індексу: $\overline{E^{\max}(p)} = \ln(10) \approx 2.303$. Це доводить, що в околі точки положення рівноваги наявний багатовимірний нелінійний вироджений стійкий або нестійкий вузол. У іншому випадку, тобто коли ентропія відрізняється від максимальної, такий фазовий портрет неможливий. Отже, врахувавши можливу зміну структури системи геомагнітних індексів, зміна ентропії до максимальної величини визначає напрямок можливої зміни типу фазового портрету.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримані нові науково обґрунтовані результати дослідження локальних властивостей динаміки автономних динамічних систем на компактному гладкому многовиді. Отримано умови локальної дифеоморфності та умови рівності розмірності Каплана-Йоркі; досліджено ентропію нормованого вектора евклідових норм дотичних векторів та застосування декомпозиції експонент Ляпунова для знаходження наближеного часу зміни структури системи. Запропоновано метод обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом, а також проведено аналіз деяких геомагнітних індексів на його основі.

Дисертація є новим дослідженням, присвяченим розробці методів аналізу локальних властивостей динаміки процесів, що описуються автономними нелінійними динамічними системами на компактному гладкому многовиді. У дослідженні набули подальшого розвитку аналіз локальних характеристик автономних систем на основі екстремального функціонала та знаходження умов локальної структурної стійкості негіперболічних автономних систем.

Основні результати полягають в наступному:

- отримано твердження щодо екстремальності ентропії вектора нормованих норм дотичних векторів для автономних систем, для яких виконуються умови Гробмана-Гартмана, та отримано екстремальний функціонал у вигляді лагранжіана;
- сформульовано умови локальної топологічної еквівалентності автономних систем на компактному гладкому многовиді та обґрунтовано рівність розмірності Каплана-Йоркі для дифеоморфних систем;
- запропоновано декомпозицію експонент Ляпунова для дослідження структури векторного поля нелінійних автономних систем;
- удосконалено метод оцінювання локальних експонент Ляпунова за часовими рядами.

Результати роботи були використані в рамках науково-дослідної теми «Prediction of Geospace Radiation Environment and Solar wind parameters» за європейським проектом PROGRESS у рамках програми HORIZON – 2020 GA#637302 та за темою «Розробити моделі фізико-хімічних, гідродинамічних процесів у космічному просторі та методи оброблення супутникових даних» № 0113U003019, яку було затверджено Президією НАН України, а також для Українського центру космічної погоди.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті у наукових фахових виданнях

1. Іванов С.М., Яценко В.О. Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*. 2016. № 3. С. 65-68.

2. Іванов С.М. Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2017. №. 4. С. 83-86.

3. Иванов С. Н., Яценко В. А. Вычисление размерности по Ляпунову и применение для прогнозирования геомагнитных индексов. *Міжнар. наук.-техніч. жур. «Системні дослідження та інформаційні технології»*. 2018. №3. С.122-132. doi: https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.11

4. Іванов С.М., Яценко В.О. Виявлення змінювання векторного поля за часовим рядом. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2018. №. 2. С. 67-70.

5. Yatsenko V.O., Ivanov S.M., Parnowski A., Vlasov D. Guaranteed NARMAX model for the prediction of geomagnetic Dst index. *Journal of Physical Studies*. 2019. Vol. 23. No. 1. pp. 1901-1 – 1901-5. doi: https://doi.org/10.30970/jps.23.1901

Статті в інших наукових виданнях

6. Наливайчук М.В., Тарасенко В.П., Іванов С.М., Яценко В.О. Алгоритмічне та програмне забезпечення адаптивного надпровідного гравіметра. *Комп'ютерно – інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2015. № 19. С. 121 – 128.

Тези та матеріали наукових конференцій

7. Ivanov S.M. Signal processing in cryogenic-optical gravimeter. *GEO-UA*: Proc. of the 4rd International Conference. (Kyiv, 26-30 May 2014). Kyiv, 2014. pp. 41-42.

8. Наливайчук М.В., Іванов С.М., Шолохов О.В., Яценко В.О. Алгоритмічне та математичне забезпечення супутникового адаптивного надпровідного гравіметра. *14-та конференція з космічних досліджень*: матер. (Ужгород, 8-12 вересня 2014). Ужгород, 2014. С. 99.

9. Макаричев М.В., Іванов С.М., Яценко В.О. Хаотична динаміка керованої ґратки та моделювання показників Ляпунова. *Четверта Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики*: матер. тез доповідей. (Київ, 23-25 квітня 2015). Київ, 2015. С. 21.

10. Іванов С.М., Макаричев М.В. Адаптивне керування білінійною динамікою чутливої маси надпровідного гравіметра. *15-та українська конференція з космічних досліджень*: матер. (Одеса, 24-28 серпня 2015). Одеса, 2015. С.143.

11. Яценко В.О., Іванов С.М., Макаричев М.В. Аналіз динаміки Кр-індексу для підтримки прийняття рішень з попередження бур. *Теорія прийняття рішень*: міжнар. школа-семінар, (Ужгород, 26 вересня - 1 жовт. 2016). Ужгород, 2016. С. 277 - 278.

12. Іванов С.М., Яценко В.О. Оцінювання спектру показників Ляпунова за хаотичним часовим рядом з шумом. *Інформаційні технології та взаємодії*: праці ІІІ міжнар. наук. - практич. конфер. (Київ, 8 - 10 лист. 2016). Київ, 2016. С. 35.

13. Іванов С.М. Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем. *Dynam. syst. model. and stab. investig.*: inter. conf. (Kyiv, 24-26 May 2017). Kyiv, 2017. P. 87.

14. Ivanov S. The investigating of geomagnetic indices (DST, KP, AE): correlation dimension, Lyapunov exponents, and prediction. 17-th Ukrainan conference on space research: proc. (Odesa, 21-25 August 2017). Odesa, 2017. P. 18.

15. Ivanov S.M. Comparison of NARMAX, Artificial neural network, and Localized Lyapynov exponents for geomagnetic indices prediction. F*ourth UK-Ukraine-Spain Meeting on Solar Physics and Space Science*: proc. (Kyiv, 28 August –1 September, 2017). Kyiv, 2017. P. 69.

16. Ivanov S.M. Nonlinear discrete models Identification method for geomagnetic indices prediction. *Automation-2017*: proc. XXIV inter. conf. (Kyiv, 13-15 September 2017). Kyiv, 2017. P. 25.

17. Ivanov S.M. NARMAX network identification and space weather prediction. *Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку*: матер. тез доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 13 – 15 грудня 2017). Київ, 2017. С. 68.

18. Іванов С.М., Яценко В.О. Необхідна і достатня умова локальної структурної стійкості динамічних систем на компактному гладкому многовиді. *Dynam. syst. modelling and stab. investig.*: inter. conf., (Kyiv, 22-24 May 2019). Kyiv, 2019. pp. 89-91.

АНОТАЦІЯ

Іванов С.М. Аналіз локальних властивостей динаміки автономних систем на компактному гладкому многовиді. - На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 «Системний аналіз і теорія оптимальних рішень». - Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» МОН України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню актуальних проблем в області аналізу автономних систем. Досліджується локальна структурна стійкість (орбітально топологічна еквівалентність), локальна (в околі точки положення рівноваги) дифеоморфність динамічних систем на компактному гладкому многовиді, які описуються звичайними диференціальними рівняннями (автономними системами), а також фрактальна розмірність Каплана-Йорки.

Математично обґрунтовано метод оцінювання локальної матриці Якобі та обчислення експонент Ляпунова. Проводиться аналіз і обчислення експонент Ляпунова, розмірності та граничної ентропії для геомагнітних індексів Dst, Kp, AE, які мають ознаки гіперхаотичної динаміки.

Ключові слова: дифеоморфізм, локально дифеоморфні системи, топологічна еквівалентність, компактний гладкий многовид, динамічна система, звичайні диференціальні рівняння, автономна система, розмірність Каплана-Йорки.

АННОТАЦИЯ

Иванов С.Н. Анализ локальных свойств динамики автономных систем на компактном гладком многообразии. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 «Системный анализ и теория оптимальных решений». - Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» МОН Украины, Киев, 2019.

Диссертация посвящена исследованию актуальных проблем в области анализа автономных систем. Исследуется локальная структурная устойчивость (орбитально топологическая эквивалентность), локальная (в окрестности точки положения равновесия) дифеоморфнисть динамических систем на компактном гладком многобразии, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (автономными системами), а также фрактальная размерность Каплана-Йорки.

Математически обоснован метод оценки локальной матрицы Якоби и вычисления экспонент Ляпунова. Проводится анализ и вычисление экспонент Ляпунова, размерности и предельной энтропии для геомагнитных индексов Dst, Kp, AE, имеющие признаки гиперхаотичной динамики.

Ключевые слова: диффеоморфизм, локально диффеоморфные системы, топологическая эквивалентность, компактное гладкое многообразие, динамическая система, автономная система, обыкновенные дифференциальные уравнения, размерность Каплана-Йорки.

ABSTRACT

Ivanov Serhii Mykolaiovych. Analysis of local properties of dynamics of autonomous systems on a compact smooth manifold. - Manuscript.

The thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the specialty 01.05.04 – Systems Analysis and Optimal Decision Theory. - National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», MES of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the research of actual problems in the field of analysis of autonomous systems such as the local structural stability (topologically orbitally equivalence), the local (in the neighborhood of the equilibrium point) diffeomorphity of dynamical systems (autonomous systems) on a compact smooth manifold, and the Kaplan-Yorke fractal dimension.

A review of the literature on the study and detection of local properties of dynamics is given. The Grobman-Hartman theorem is discussed. Hyperbolic systems, conditions of its local diffeomorphity without zero and with zero among the eigenvalues of the Jacobian matrix calculated in the neighborhood of an equilibrium point are considered. Much attention has been paid to the Kaplan-Yorke dimension or the Lyapunov dimension for autonomous systems. There is equality of the Lyapunov dimension in topologically and topologically orbitally equivalent systems. The equality of the Lyapunov dimension and the information dimension is confirmed. A description of the Kaplan-Yorke dimension and its relationship with other dimensions are given. The entropy of the normalized vectors of norms of tangent vectors of autonomous systems is introduced. The extreme functional (Lagrangian) of the maximization of the sum of the introduced entropy, the function of exponential divergence (convergence), initial conditions, and normalization for each moment of time is considered. It is shown that the deduced functional corresponds to the principle of maximum (maximum uncertainty) which can also be considered as a propagation of the Bernoulli-Laplace principle of insufficient basis. The corresponding theorems are proved.

The definition of introduced entropy and average entropy is given. Dynamic systems described by differential equations on a d-measurable compact smooth manifold are not locally different from differential equations on $\Re^d$. The Euclidean norm is used.

The zero average entropy theorem is proved. The limit of the average entropy is considered. The formula for the relation between the average entropy and the Lyapunov exponents is derived.

The maximum of the average entropy corresponds degenerate equilibrium points of the dynamic systems such as a scalar matrix or degenerate node (Jordan cage).

When entropy is less than maximum such a degenerate equilibrium points are impossible. Thus, the possible change in the structure of the autonomous system is detected by the increase of the average entropy. That is the direction for a possible change in the type of phase portrait.

When the phase space of larger dimension the number of types of such points is already greater, and they should combine the properties of the above types. It is noted that it is advisable to break into subspaces with stable points or unstable of a certain type. In diffeomorphic dynamical systems the Kaplan-Yorke dimension is the same.

Takens's theorems on embedding for discrete and continuous time are considered. The delay time is estimated using an autocorrelation function for the time series of one variable of autonomous systems such as the Lorentz system, Ressler system, and Henon map. The Grasberger-Proccaccia dimension for estimating the size of embedding is described. The content of the Grassberger-Proccaccia dimension and the correlation integral is explained. The Lyapunov exponents decomposition shows the detection of the variability of the vector field of the autonomous dynamic system. The ordering of decomposition limits is considered. A numerical algorithm is provided to calculate these limits by a time series and average entropy.

The method for estimating the local Jacobian matrix and calculating Lyapunov exponents is substantiated. The analysis and calculation of the Lyapunov exponents, the dimensions, and average entropy for geomagnetic indices Dst, Kp, and AE are given. It is noted that these geomagnetic indices have signs of hyperhaotic dynamics.

Keywords: diffeomorphism, locally diffeomorphic systems, topological equivalence, compact smooth manifold, dynamic system, autonomous system, ordinary differential equations, Kaplan-Yorke dimension.